

MATEMATIKA 2

Lekcija 6- Diferencijalni račun realnih funkcija više realnih nezavisno promenljivih

Osnovni pojmovi. Pojam funkcije jedne nezavisno promenljive je često neadekvatan za modeliranje relacija i fenomena koji se sreću u realnom svetu. Mnoge realne veličine zavise od dve, tri ili više nezavisno promenljivih. Na primer, zapremina provouglog paralelopipeda zavisi od tri nezavisno promenljive, a površine pravougaonika i trougla zavise od dveju nezavisno promenljivih. Ovo su tri među brojnim primerima funkcija više nezavisno promenljivih.

Neka je \mathbb{R}^n skup svih uredjenih n -torki (x_1, x_2, \dots, x_n) realnih brojeva. Ako su $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dve n -torke iz \mathbb{R}^n , sa $d(x, y)$ se obeležava rastojanje između njih definisano kao

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}.$$

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ fiksirana tačka u \mathbb{R}^n . Skup svih $y \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $d(x, y) < r$ zove se n -dimenziona otvorena kugla sa centrom u tački x i poluprečnikom r , u oznaci $K(x, r)$.

U skupu \mathbb{R} kugla $K(x, r)$ je interval $(x - r, x + r)$, a u skupu \mathbb{R}^2 kugla $K(x, r)$, gde je $x = (x_1, x_2)$, je skup svih (y_1, y_2) za koje je $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$, dakle u ovom slučaju $K(x, r)$ je kružna oblast sa centrom u tački x i poluprečnikom r .

Okolina tačke $x \in \mathbb{R}^n$, u oznaci $O(x)$, je podskup od \mathbb{R}^n koji sadrži kuglu $K(x, r)$, za neko $r > 0$. Na primer, u skupu \mathbb{R}^2 okolina tačke $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je svaki skup $O(x)$ koji sadrži neku kružnu oblast sa centrom u tački (x_1, x_2) .

Skup $G \subset \mathbb{R}^n$ je otvoren ako je okolina svake svoje tačke. Skup $F \subset \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \setminus F$ otvoren.

Tačka $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ je unutrašnja tačka skupa X ako postoji neka kugla $K(a, r)$ takva da je $K(a, r) \subset X$.

Mi ćemo ovde razmatrati funkcije dveju realnih nezavisno promenljivih $z = f(x, y)$, gde je f pravilo koje tačkama (x, y) (uređenim parovima realnih brojeva x i y) dodeljuje realne brojeve z . Skoro svi pojmovi uvedeni za funkcije dveju nezavisno promenljivih bez većih teškoća se prenose i na funkcije više nezavisno promenljivih.

Kada je funkcija f zadata formulom (analitičkim izrazom) onda se određuje najveći podskup X xy -ravni u čijim tačkama funkcija uzima realne vrednosti. Taj podskup je njena oblast definisanosti ili definicioni skup.

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na podskupu X xy -ravni. Tada se svakoj tački $(x, y) \in X$ pridružuje (dodeljuje) tačka $(x, y, f(x, y))$ u trodimenzionom prostoru. Skup svih tačaka $(x, y, f(x, y))$ kada $(x, y) \in X$ zove se grafik funkcije $z = f(x, y)$.

Granična vrednost i neprekidnost. Neka je $f(x, y)$ funkcija dveju realnih nezavisno promenljivih, definisana na nekom podskupu $X \subset \mathbb{R}^2$, gde X sadrži neku kružnu oblast sa centrom u tački (x_0, y_0) , sem, možda, tačku (x_0, y_0) . Funkcija $f(x, y)$ ima graničnu vrednost b u tački (x_0, y_0) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$ tako da je $|f(x, y) - b| < \varepsilon$ kad god je $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Tada, kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive, pišemo $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = b$.

Za funkcije jedne nezavisno promenljive definisali smo levu i desnu graničnu vrednost u tački x_0 , odnosno posmatrali približavanje tački x_0 s leve i s desne strane. U slučaju funkcije dveju realnih nezavisno promenljivih posmatramo približavanje tački (x_0, y_0) po svakoj krivoj, pa ako granična vrednost postoji, ona mora biti jedinstvena bez obzira po kojoj krivoj se približavamo tački (x_0, y_0) .

Osobine granične vrednosti funkcije dveju nezavisno promenljivih analogne su osobinama graničnih vrednosti funkcija jedne nezavisno promenljive.

Pored granične vrednosti $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ mogu se posmatrati i takozvani ponovljeni, tj. uzastopni limesi. Naime, možemo tražiti graničnu vrednost kad nezavisno promenljive uzastopno teže granicama, tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$ i $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$. U prvom slučaju se pretpostavlja da je x konstanta različita od x_0 a u drugom da je y konstanta različita od y_0 .

Granična vrednost funkcije dveju nezavisno promenljivih ne mora biti jednaka ponovljenim limesima te funkcije.

Neka je tačka (x_0, y_0) unutrašnja tačka oblasti definisanosti $X \subset \mathbb{R}^2$ funkcije $f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih. Funkcija $f(x, y)$ je neprekidna u tački (x_0, y_0) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$ tako je $(x, y) \in X$ važi $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ kad god je $(x, y) \in X$ i $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

Neposredno je jasno da je funkcija $f(x, y)$ neprekidna u tački $(x_0, y_0) \in X$ ako i samo ako je $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Funkcija $f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow$

\mathbb{R} je neprekidna na skupu Y , $Y \subset X$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa Y .

Neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po svakoj od nezavisno promenljivih x i y razlikuje se od neprekidnosti funkcije $f(x, y)$ kao funkcije dveju nezavisno promenljivih. Naime, funkcija $f(x, y)$ je neprekidna po x za fiksirano $y = y_0$, ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Analogno za neprekidnost po promenljivoj y .

Ako su funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ neprekidne u tački (x_0, y_0) , tada su u toj tački neprekidne i funkcije $f(x, y) \pm g(x, y)$, $f(x, y) \cdot g(x, y)$, a i $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ pod uslovom da je $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Slično kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive, neprekidnost funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) njenog domena može se izraziti i u terminima priraštaja funkcije $f(x, y)$. Naime, razlika $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ se zove priraštaj funkcije koji odgovara priraštajima Δx i Δy argumenata x i y . Tada je jednakost

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ekvivalentna jednakosti

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0,$$

kojom se opisuje uslov da je funkcija $z = f(x, y)$ neprekidna u tački (x_0, y_0) .

Ovaj deo o neprekidnosti završavamo **teoremom**:

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti $X \subset \mathbb{R}^2$, tada ona na X dostiže najmanju i najveću vrednost. (Bez dokaza.)

Parcijalni izvodi i diferencijal. Neka je (x_0, y_0) unutrašnja tačka oblasti definisanosti $X \subset \mathbb{R}^2$ funkcije $f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih. Prvi parcijalni izvod po x funkcije $f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) , u oznaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, definiše se kao

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Prvi parcijalni izvod po y funkcije $f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) , u oznaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, definiše se kao

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Brojioci u razlomcima s desne strane se označavaju sa $\Delta_x z$ i $\Delta_y z$, respektivno, i zovu se delimični priraštaji po x odnosno po y . Prema tim oznakama, može se pisati

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

U oba slučaja pretpostavljamo postojanje graničnih vrednosti. Koriste se i oznake $f'_x(x_0, y_0)$ i $f'_y(x_0, y_0)$.

Na sličan način se definišu parcijalni izvodi funkcije od n nezavisno promenljivih, za $n > 2$.

Primetimo da se pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ promenljiva y smatra konstantnom, a pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ promenljiva x smatra konstantnom. Potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po x je neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po x za fiksirano y , dok je potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po y neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po y za fiksirano x . Međutim, parcijalni izvod po, na primer, promenljivoj x može da postoji i u tački u kojoj posmatrana funkcija nije neprekidna kao funkcija dveju nezavisno promenljivih.

Geometrijsko tumačenje parcijalnog izvoda. Posmatraćemo površ S određenu jednačinom $z = f(x, y)$ u trodimenzionom prostoru, gde je $f(x, y)$ neprekidna funkcija koja ima parcijalne izvode u nekoj oblasti X . Želimo da damo geometrijsku interpretaciju parcijalnih izvoda funkcije $f(x, y)$ u tački $(x_0, y_0) \in X$, kojoj odgovara tačka $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na površi S .

Prilikom izračunavanja parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ u tački (x_0, y_0) funkciju $z = f(x, y)$ tretiramo kao funkciju jedne nezavisno promenljive x , a y tretiramo kao konstantu, tj. $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Funkcija $z = f_1(x)$ određuje krivu C dobijenu presecanjem površi S i ravni $y = y_0$. Koristeći geometrijsku interpretaciju izvoda funkcije jedne nezavisno promenljive, možemo pisati $f'_1(x_0) = \tan \alpha$, gde je α ugao između x -ose i tangente krive C u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Kako je $f'_1(x_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, to je $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \tan \alpha$. Znači, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ je koeficijent pravca tangente u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ krive koja se dobija presecanjem ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$. Analogno, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \tan \beta$.

Diferencijabilnost funkcije. Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na nekom podskupu X xy -ravni i neka je (x, y) neka unutrašnja tačka skupa X . Sa Δx i Δy označimo priraštaje nezavisno promenljivih x i y takve da $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in X$. Kaže se da je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački $(x, y) \in X$ ako se njen totalni priraštaj u tački (x, y) pri priraštajima Δx i Δy nezavisno promenljivih x i y , tj.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

za svaku tačku $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ neke kugle $K(x, r) \subset X$, može predstaviti u obliku

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \quad (1)$$

gde su A i B neki brojevi nezavisni od Δx i Δy , a $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ i $\beta(\Delta x, \Delta y)$ neke funkcije koje teže nuli kad Δx i Δy teže nuli.

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x, y) , tada se linearni (u odnosu na Δx i Δy) deo njenog priraštaja zove diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x, y) . Diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ se označava sa dz i zapisuje

$$dz = A \Delta x + B \Delta y.$$

Tada je $\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$.

Poslednji izraz za totalni priraštaj diferencijabilne funkcije u tački (x, y) može se napisati u obliku $\Delta z = dz + o(\rho)$, gde je

$$o(\rho) = \phi(\Delta x, \Delta y) \rho, \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

a funkcija $\phi(\Delta x, \Delta y)$ teži nuli kad Δx i Δy teže nuli.

Neophodan uslov diferencijabilnosti funkcije. Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u nekoj tački, tada $f(x, y)$ ima parcijalne izvode $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u toj tački, i oni su, redom, jednaki brojevima A i B , tj. $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = A$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = B$.

(Dokaz — na vežbama AG).

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije. Podsetimo se da je funkcija $y = f(x)$ jedne nezavisno promenljive diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako u toj tački ima izvod $f'(x_0)$. Međutim, za funkcije više nezavisno promenljivih ne može se formulisati sličan potreban i dovoljan uslov. Dovoljan uslov postoji odvojeno od neophodnog uslova koji je gore naveden. Samo navodimo teoremu o tome, ali je ne dokazujemo.

Teorema 1. Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne izvode $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) i neka su $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ neprekidni u tački (x_0, y_0) . Tada je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x_0, y_0) .

Totalni diferencijal. Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna, tada je njen totalni diferencijal dat sa $dz = A \Delta x + B \Delta y$. Znajući da je $A = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, možemo dz pisati kao

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Kao u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive, izjednačićemo diferencijale nezavisno promenljivih sa njihovim priraštajima, tj. $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$. Tada se totalni diferencijal zapisuje kao

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Pretpostavimo da je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x, y) i da je $dz \neq 0$ u toj tački. Tada se totalni priraštaj

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y$$

razlikuje od linearnog dela

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

samo za sumu $\alpha \Delta x + \beta \Delta y$, gde su $\alpha \Delta x$ i $\beta \Delta y$, kad $\Delta x \rightarrow 0$ i $\Delta y \rightarrow 0$, infinitezimale višeg reda nego sabirci u dz . Ako je $dz \neq 0$, linearni deo totalnog priraštaja diferencijabilne funkcije se zove glavni deo tog priraštaja. Aproksimacija

$$\Delta z \approx dz$$

se često koristi. Napomenimo da je navedena aproksimacija to preciznija što su manje vrednosti priraštaja nezavisno promenljivih.

Parcijalni izvodi složene funkcije. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ definisana u nekom podskupu X xy -ravni i neka su x i y funkcije jedne nezavisno promenljive t takve da je

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Pretpostavimo da za bilo koje $t \in (t_0, t_1)$ odgovarajuća tačka (x, y) pripada domenu X funkcije $z = f(x, y)$. Tada smena $x = g(t)$, $y = h(t)$ svodi funkciju $z = f(x, y)$ na složenu funkciju $z = f(g(t), h(t))$ jedne realne nezavisno promenljive.

Navodimo teoremu o izvodu funkcije $z = f(g(t), h(t))$ po promenljivoj t :

Teorema 2. Ako u tački t postoje izvodi

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dt} = h'(t),$$

i ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački $(x, y) = (g(t), h(t))$, tada složena funkcija $z = f(g(t), h(t))$ ima izvod $\frac{dz}{dt}$ u tački t i važi formula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

(Dokaz — na vežbama AG).

Ovom teoremom prikazana je suština pravila o izvodu složene funkcije, mada u jednom vrlo specijalnom slučaju. Evo sada opštije teoreme.

Teorema o parcijalnim izvodima složene funkcije: Neka je funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna u tački $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ i neka su funkcije

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

diferencijabilne u tački $(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})$, pri čemu je

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0}) &= x_{10}, \varphi_2(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0}) = x_{20}, \dots, \\ \varphi_n(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0}) &= x_{n0}.\end{aligned}$$

Tada je i složena funkcija

$$\begin{aligned}z &= f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)) =: \\ &=: F(t_1, t_2, \dots, t_m)\end{aligned}$$

diferencijabilna u tački $(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})$ i važi

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})}{\partial t_j} &= \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})}{\partial t_j} + \\ &+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})}{\partial t_j} + \dots \\ &+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n(t_{10}, t_{20}, \dots, t_{m0})}{\partial t_j},\end{aligned}$$

za $j = 1, 2, \dots, m$. (Bez dokaza.)

Diferencijal složene funkcije. Ako je $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija nezavisno promenljivih x i y , tada je njen totalni diferencijal dz jednak

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (*)$$

gde je $dx = \Delta x$ i $dy = \Delta y$.

Pretpostavimo sada da je $z = f(x, y)$ složena funkcija, na primer, da je $x = g(u, v)$ i $y = h(u, v)$. Za funkcije $x = g(u, v)$ i $y = h(u, v)$ još pretpostavimo da imaju neprekidne parcijalne izvode u tački (u, v) . Kako je $z = z(u, v) = f(g(u, v), h(u, v))$, to je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (**)$$

Zamenjujući u formuli (**) $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ sa

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v},$$

uz korišćenje jednakosti

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = dx \quad \text{i} \quad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = dy,$$

dobijamo formulu (*). Odatle zaključujemo da je totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ dat formulama istog oblika kada su promenljive x i y nezavisne i kada promenljive x i y zavise od drugih promenljivih. Dakle, totalni diferencijal funkcije dveju i više nezavisno promenljivih ostaje isti (invarijantan je) pri smeni promenljivih.

Napomena. Na osnovu prethodnih rezultata lako je proveriti sledeća pravila diferenciranja:

$$d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(xy) = xdy + ydx, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad (y \neq 0).$$

Ona ostaju tačna i kada su x i y diferencijabilne funkcije od proizvoljnog konačnog broja nezavisno promenljivih, tj. za $x = g(u, v, w, \dots)$ i $y = h(u, v, w, \dots)$.

Izvodi i diferencijali viših redova. Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne izvode u svakoj tački oblasti G . Tada su $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nove funkcije dveju nezavisno promenljivih definisane na G . Ako i one imaju svoje parcijalne izvode u tačkama oblasti G , dolazimo do drugih parcijalnih izvoda funkcije $f(x, y)$ i označavamo ih redom sa

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Poslednja dva parcijalna izvoda se zovu mešoviti parcijalni izvodi drugog reda funkcije $z = f(x, y)$. Na isti način može se govoriti o parcijalnim izvodima trećeg, četvrtog, ... reda funkcije dveju ili više nezavisno promenljivih.

U vezi sa parcijalnim izvodima, od interesa je da se raspravi pitanje kada će mešoviti parcijalni izvodi k -tog reda funkcije od n nezavisno promenljivih biti nezavisni od redosleda diferenciranja. O tome govore naredne dve teoreme, prva u slučaju $k = n = 2$, a druga u opštem slučaju.

Teorema 3. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ i neka je (x_0, y_0) neka tačka oblasti G . Ako postoje $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ u svakoj tački oblasti G , i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ su neprekidni u tački (x_0, y_0) , tada važi jednakost $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. (Dokaz — na vežbama AG.)

Teorema 4. Ako u nekoj oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ima neprekidne sve parcijalne izvode k -tog reda, i neprekidne mešovite parcijalne izvode $k + 1$ -vog reda, tada je svaki od tih mešovityh parcijalnih izvoda nezavisan od redosleda diferenciranja. (Bez dokaza.)

Pretpostavimo da funkcija $z = f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y ima neprekidne druge parcijalne izvode u nekoj tački (x_0, y_0) . Tada je diferencijal od dz , odnosno diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x, y)$, $d^2z = d(dz)$, u tački (x_0, y_0) pri priraštajima dx i dy nezavisno promenljivih, jednak

$$d^2z = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (dy)^2.$$

Izraz na desnoj strani ove jednakosti može se simbolički predstaviti u obliku $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x_0, y_0)$. Pritom operator $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2$ deluje na funkciju $z = f(x, y)$ na sledeći način: sumu $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ treba kvadrirati po binomnom obrascu, a zatim stepene od $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ zameniti parcijalnim izvodima odgovarajućih redova.

Ovakva teorema važi za diferencijal bilo kog reda.

Teorema 5. Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima u tački (x_0, y_0) neprekidne sve parcijalne izvode k -tog reda, tada postoji k -ti diferencijal $d^k f(x_0, y_0; dx, dy)$ funkcije f u tački (x_0, y_0) pri priraštajima dx i dy nezavisno promenljivih, i jednak je

$$d^k f(x_0, y_0; dx, dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x_0, y_0).$$

(Bez dokaza.)

Na kraju navodimo teoremu o aproksimaciji funkcije dveju nezavisno promenljivih polinomom stepena n .

Tejlorova teorema: Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana i neprekidna zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima do $n + 1$ -vog reda u nekoj otvorenoj okolini V tačke (x_0, y_0) , takvoj da iz $(x, y) \in V$ sledi da i duž koja spaja tačke (x_0, y_0) i (x, y) leži u V . Tada za svaku tačku $(x, y) \in V$ postoji

broj $\theta \in (0, 1)$ takav da važi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \\ &= f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) + \\ &\quad + R_n(f; x_0, y_0; x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

gde je

$$\begin{aligned} R_n(f; x_0, y_0; x, y) &= \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \end{aligned}$$

i $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Relacija (2) je Tejlorova formula za funkciju dveju nezavisno promenljivih. Polinom

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right]^k f(x_0, y_0) &=: \\ &=: T_n(f; x_0, y_0; x, y) \end{aligned}$$

je Tejlorov polinom n -tog stepena oko tačke (x_0, y_0) funkcije $z = f(x, y)$.

Ako je $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tada se Tejlorova teorema naziva Maklorenovom teoremom a Tejlorov polinom Maklorenovim polinomom, kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive.